BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

Prioritätsbescheinigung über die Einreichung einer Patentanmeldung

Aktenzeichen: 100 62 120.1

Anmeldetag: 13. Dezember 2000

Anmelder/Inhaber: Michael Griebel, Bonn/DE;
Thomas Gerstner, Bonn/DE;
Sebastian Wahl, Bonn/DE

Bezeichnung: Vorrichtung und Verfahren zur Bewertung von Finanzderivaten mit Hilfe von dünnen Gittern

IPC: G 06 F 17/60

Die angehefteten Stücke sind eine richtige und genaue Wiedergabe der ursprünglichen Unterlagen dieser Patentanmeldung.

München, den 10. Oktober 2001
Deutsches Patent- und Markenamt
Der Präsident
Im Auftrag

Brand

A 9161
06/00
EDV-L

THIS PAGE BLANK (USPTO)

Zusammenfassung

1 Bezeichnung

Vorrichtung und Verfahren zur Bewertung von Finanzderivaten mit Hilfe von dünnen Gittern.

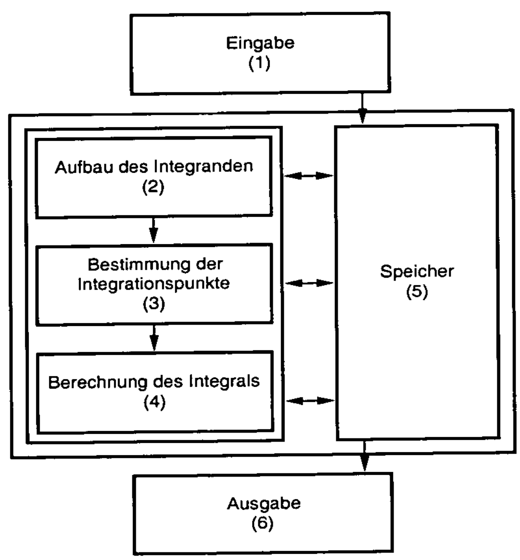
2.1 Technische Aufgabe und Zielsetzung

Die schnelle und genaue Bewertung komplexer Finanzderivate ist ein zentrales Problem vieler Banken, Versicherungen und Anleger. In vielen Fällen kann der Preis solcher Derivate als Erwartungswert bestimmt werden. Bestehende Vorrichtungen und Verfahren zur Berechnung dieser Erwartungswerte basierend auf Monte Carlo oder Quasi–Monte Carlo Integration sind jedoch sehr zeitintensiv und ungenau.

2.2 Lösung der Aufgabe

Die Bewertung von Finanzderivaten wird mittels einer Vorrichtung bestehend aus einem Computer und einem Verfahren basierend auf multivariater numerischer Integration mit Hilfe von dünnen Gittern durchgeführt. Das vorgeschlagene Verfahren kann die auftretenden Erwartungswerte effizienter als bisherige Verfahren berechnen und damit die Preise der Derivate wesentlich schneller und genauer ermitteln.

Die Vorrichtung beinhaltet eine Ein- (1) und eine Ausgabeeinheit (6), eine Speichereinheit (5) sowie eine Programmeinheit (2–4). Die Programmeinheit besteht aus einem Aufbaumodul (2), einem Diskretisierungsmodul (3) und einem Integrationsmodul (4).
Im Falle nicht glatter Integranden, wie sie z.B. bei der Bewertung von Optionen auftreten, wird das Integrationsgebiet durch Transformationen in glatte Teilgebiete zerlegt. Eine zusätzliche Beschleunigung des Verfahrens wird durch Dimensionsreduktion sowie Parallelisierung ermöglicht.



2.3 Anwendungsgebiet

Die Vorrichtung ermöglicht zusammen mit dem vorgeschlagenen Verfahren die schnelle und genaue Bestimmung objektiver sowie subjektiver Preise von Finanzderivaten, wie z.B. Bonds, Swaps, Futures, CMOs und Optionen. Die ermittelten Preise können z.B. zum Kauf oder Verkauf der Derivate selbst, zur Portfoliooptimierung, Preisbestimmung von Verträgen, Risikomanagement oder Entscheidungsfindung bei Investitionen verwendet werden.

Beschreibung

1 Technisches Gebiet

Die Erfindung liegt auf dem Gebiet der elektronischen Datenverarbeitung, speziell auf dem Gebiet der Finanzinformatik. Insbesondere betrifft die Erfindung die schnelle und genaue Bewertung von Finanzderivaten mit Hilfe von elektronischen Rechnensystemen.

2 Stand der Technik

Die Bewertung von Finanzderivaten hat im letzten Jahrzehnt einen starken Aufschwung erfahren und ist zu einem wichtigen Instrument in der Finanzwirtschaft geworden. Einerseits ist die Möglichkeit einer Bewertung eine notwendige Voraussetzung, damit ein Finanzinstitut überhaupt ein neues Derivat anbieten kann, andererseits ist die Bewertung nötig um ein Portfolio geeignet zu strukturieren, abzusichern und zu optimieren.

Es gibt nun eine Reihe verschiedener Arten von Finanzderivaten, die beispielsweise Zins- oder Aktien–basiert sind. Hierzu zählen u.a. Bonds, Swaps, Futures, CMOs und Optionen. Ihre Bewertung erfolgt, unter der Annahme, daß keine Arbitragemöglichkeit besteht, mittels partieller Differentialgleichungen oder über den Martingalansatz. Letzterer ist jedoch allgemeiner. Dabei spezifiziert man zunächst einen stochastischen Prozeß für den zugrunde liegenden Wert (zum Beispiel den Zinssatz oder den Aktienkurs). Dann bestimmt man das äquivalente Martingalmaß, das den zugrunde liegenden Prozeß in ein Martingal umwandelt und berechnet den Wert des Derivats als den Erwartungswert seiner discounteten Auszahlungsfunktion unter diesem risikoneutralen Maß. Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Zugang über eine partielle Differentialgleichung und das Martingal gleichwertig. Der Zusammenhang wird dabei über verallgemeinerte Feynman-Kacz Formeln hergestellt. Der Martingalansatz ist jedoch universeller einsetzbar und leichter auf neue Situationen übertragbar.

Der Preis eines Finanzderivats läßt sich somit als Erwartungswert ausdrücken. In kontinuierlicher Zeit beinhaltet der Integrand dabei wiederum ein Pfadintegral, das etwa mit dem Euler-Verfahren/Trapezregel diskretisiert werden kann oder es wird bedingt durch die Anwendung gleich ein zeitdiskretes Modell verwendet. In beiden Fällen führt dies zu einem hochdimensionalen Integrationsproblem. Für die einfache Europäische Call Option ist es möglich eine geschlossene Lösung anzugeben (Black-Scholes Formel), kompliziertere Optionstypen benötigen jedoch ein numerisches Lösungsverfahren. Dies gilt analog auch für die anderen Arten von Finanzderivaten.

Als numerisches Integrationsverfahren für hochdimensionale Integranden ist die klassische multivariate Quadratur nicht geeignet. Hier begegnet man dem Fluch der Dimensionalität: Der Aufwand skaliert hier exponentiell mit der Dimension. Man hat die Komplexität der Ordnung $O(N^{-r/d})$ wobei r die Glattheit des Integranden und d seine Dimension bezeichnen. Hingegen ist das Monte Carlo Verfahren von der Dimension unabhängig. Dabei wird der Integrand f an einer zufälligen Folge von N Punkten $\mathbf{x}_i$ ausgewertet und man erhält die Quadraturformel

$$Q_N f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{x}_i).$$

Das Monte Carlo Verfahren konvergiert jedoch nur sehr langsam (und auch nur im statistischen Sinne). So ist die Genauigkeit, die mit N Funktionsauswertungen erzielt werden kann, von der Ordnung $O(1/\sqrt{N})$. Von besonderem Interesse sind deswegen die im letzten Jahrzehnt

entwickelten Quasi Monte Carlo Methoden [4]. Hier wird der Integrand für eine deterministisch bestimmte Folge von Punkten $\mathbf{x}_i$ ausgewertet und man verwendet als Quadaturformel analog zum Monte Carlo–Verfahren

$$Q_N f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{x}_i).$$

Es gibt hierbei eine Reihe verschiedener Konstruktionen, beispielsweise die Halton-, Sobol- oder Faure-Folgen, die sich in ihrer Präasymptotik unterscheiden aber alle in einer Konvergenzordnung des Typs $O((\log N)^d/N)$ resultieren. Diese ist also fast eine Ordnung besser als für die Monte Carlo Methode. Zudem ist der Fehler deterministisch. Prototyp ist hierbei das Programm FinDer von J. Traub [9], das mittlerweile in vielen Banken verwendet wird. Diese Methode wurde in den Patenten US005940810A [7] und US006058377A [8] dokumentiert.

Weiterhin gibt es sogenannte Dünngitterverfahren [2, 6]. Bei diesem Ansatz werden mehrdimensionale Quadraturformeln durch geeignete Kombination von Tensorprodukten eindimensionaler Quadraturformeln, wie z.B. Clenshaw–Curtis oder Gauß–Patterson Formeln, konstruiert. Das allgemeine Dünngitterverfahren kann wie folgt beschrieben werden. Man betrachtet zunächst eine Folge eindimensionaler Quadraturformeln für eine eindimensionale Funktion f,

$$Q_l^1 f := \sum_{i=1}^{n_l^1} w_{li} \cdot f(x_{li}).$$

Nun definiere die Differenzformel durch

$$\begin{aligned} \Delta_k^1 f &:= (Q_k^1 - Q_{k-1}^1) f \quad \text{with} \\ Q_0^1 f &:= 0. \end{aligned}$$

Die Dünngitterkonstruktion für d–dimensionale Funktionen f besteht für $l \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ aus

$$Q_l^d f := \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{I}_l} (\Delta_{k_1}^1 \otimes \ldots \otimes \Delta_{k_d}^1) f.$$

mit Indexmengen $\mathcal{I}_l$ sodaß für alle $\mathbf{k} \in \mathcal{I}_l$,

$$\mathbf{k} - \mathbf{e}_j \in \mathcal{I}_l \quad \text{for} \quad 1 \leq j \leq d, \ k_j > 1,$$

gilt. Spezialfälle des Verfahrens sind klassische dünne Gitter, wo $\mathcal{I}_l = \{|\mathbf{k}|_1 \leq l + d - 1\}$, sowie klassische Produktformeln, bei denen $\mathcal{I}_l = \{|\mathbf{k}|_\infty \leq l\}$. Abb. 4 gibt Beispiele verschiedener klassischer dünner Gitter im 2D Fall basierend auf der Trapez-, der Clenshaw–Curtis Formel, der Gauß–Patterson und der Gauß–Legendre Formel. Ein substanzieller Unterschied zu Monte Carlo und Quasi–Monte Carlo Verfahren ist hier die Verwendung unterschiedlich großer Gewichtsfaktoren, d.h. in der Darstellung $Q_N f = \sum_{i=1}^N w_i f(\mathbf{x}_i)$ sind die Gewichte w_i des Dünngitterverfahrens nicht alle gleich $1/N$.

Die Konvergenzordnung das klassischen Dünngitterverfahrens ist $\varepsilon = O(\log(N)^{(d-1)(r+1)} N^{-r})$ und damit ebenfalls unabhängig von der Dimension d. Im Gegensatz zu Monte Carlo und Quasi–Monte Carlo Verfahren kann das Dünngitterverfahren allerdings auch die Glattheit r des Integranden nutzen und hat damit exponentielle Konvergenz bei glattem Integranden ($r \to \infty$). Für glatte Integranden ist damit dieses Verfahren substantiell schneller als die Monte Carlo oder Quasi–Monte Carlo Verfahren.

Für das Dünngitterverfahren ergeben sich jedoch zwei grundsätzliche Probleme: Zum einen verschlechtert sich die Konvergenzrate des Verfahrens bei nicht glatten Integranden, wie sie z.B. bei Optionen auftauchen, d.h. es verliert in diesem Fall seinen Vorteil. Zum anderen ist das Verfahren ebenso wie Quasi–Monte Carlo Verfahren nicht vollkommen unabhängig von der Dimension und die Konvergenzrate verschlechtert sich ebenfalls mit ansteigender Dimension.

3 Erfindung

Die Erfindung bezieht sich hierbei auf eine Vorrichtung bestehend aus einem Computer und ein Verfahren, welches auf der Dünngittertechnik basiert, die die schnelle Berechnung von Erwartungswerten erlaubt, wie sie zur Bewertung von Derivaten aus dem Finanz- und Bankenwesen, z.B. Zins-, Aktien-, Währungs- oder Güterderivaten, benötigt werden.

Die Vorrichtung (Abb. 1) besteht aus einem Computer mit einer Ein- (1) und Ausgabeeinheit (6), einer Speichereinheit (5) sowie einer Programmeinheit (2–4). Die Ein- und Ausgabeeinheiten ermöglichen die Eingabe der Derivatparameter und die Ausgabe des Derivatwertes. Die Speichereinheit wird zur Ablegung des Programms, der Ein- und Ausgabewerte, sowie von Zwischenergebnissen benötigt. Die Programmeinheit besteht aus einem Aufbaumodul (2), einem Diskretisierungsmodul (3) und einem Integrationsmodul (4). Das Aufbaumodul hat die Aufgabe der Bestimmung der Integrationsfunktion. Das Diskretisierungsmodul ermittelt geeignete Integrationspunkte mittels dünner Gitter. Das Integrationsmodul berechnet daraufhin den Wert des Derivats durch Kombination der Funktionswerte an den Integrationspunkten.

Im Folgenden werden die einzelnen Komponenten genauer beschrieben. Die Eingabe erfolgt über eine Tastatur, ein anderes Eingabegerät oder über eine analoge bzw. digitale Verbindung. Die Eingabedaten spezifizieren den genauen Typ des Derivats sowie die Eigenschaften der zugrunde liegenden Werte. Die Daten sowie weitere Zwischenergebnisse werden in einem Speicher abgelegt. Ein Computerprogramm liest in einem ersten Schritt (Aufbau) diese Daten ein und baut ein mehrdimensionales Integrationsproblem basierend auf den Eingabedaten auf. In einem zweiten Schritt (Diskretisierung) werden mit Hilfe dieser Informationen geeignete Integrationspunkte und Integrationsgewichte basierend auf der Dünngitter–Technik ermittelt. Im dritten Schritt (Integration) wird das Integrationsproblem durch Auswertung des Integranden an den berechneten Integrationspunkten und Kombination der Ergebnisse gelöst und als Ergebnis der Wert des Derivats zurückgeliefert. Die Ausgabe erfolgt über einen Bildschirm, ein anderes Ausgabegerät oder eine analoge bzw. digitale Verbindung.

Dieses Verfahren ist bei glatten Integranden, wie sie typischerweise zur Bewertung von Zinsderivaten auftreten, ohne weitere Modifikationen einsetzbar. Beispiele hierfür sind Portfolio–Optimierung, Preisfestsetzung von *futures* und *forward*–Verträgen, die Bewertung hypothekenbasierter Wertpapiere, Preisbestimmung von Versicherungsverträgen, Risikomanagement oder Entscheidungsfindung bei Investitionen. Im Falle von nicht–glatten Integranden, wie sie z.B. bei der Bewertung von Optionen auftreten, verschlechtert sich jedoch Konvergenz des Verfahrens stark. In so gut wie allen Fällen besitzen hier die Integranden unstetige erste Ableitungen ($r = 1$), in manchen Fällen ist sogar der Integrand selbst unstetig ($r = 0$). Ein wesentlicher weiterer Bestandteil der Erfindung ist daher eine Zerlegung des Integrationsgebiets in glatte Bereiche im Diskretisierungsschritt. Durch geeignete Transformationen werden dann die Dünngitterquadraturformeln auf diese Teilbereiche abgebildet und das Gesamtintegral als Summe dieser Einzelintegrale berechnet. Auf diese Weise wird nur über glatte Bereiche integriert und die positiven Eigenschaften des Dünngitterverfahrens bleiben erhalten.

Das Dünngitterverfahren ist zwar weitestgehend, aber dennoch nicht vollständig von der Dimension des Integrationsproblem unabhängig. Die Dimension d tritt in der Konvergenzordnung als Exponent eines logarithmischen Faktors auf. Dies führt zu einer (wenngleich auch langsamen) Verschlechterung der Konvergenz, wenn die Dimension d ansteigt. Daher ist es sinnvoll, dimensionsreduzierende Verfahren anzuwenden. Zum einem wird im Falle von pfadabhängigen Optionen der zugrunde liegende stochastische Prozesses hierarchisch (z.B. mit Braunscher Brücke) diskretisiert. Zum anderen wird im Falle von performance–abhängigen Optionen die Volatilitätsmatrix mittels Singulärwertzerlegung transformiert. In beiden Fällen wird durch eine Fokussierung auf

die jeweils wichtigsten Dimensionen im Aufbaumodul eine Reduktion der effektiven Dimension vorgenommen. Das Dünngitterverfahren verwendet dann im Diskretisierungsmodul genauere Quadraturformeln in wichtigeren Dimensionen und weniger genaue Formeln in weniger wichtigen Dimensionen. Auf diese Weise wird in vielen Fällen eine weitestgehende Unabhängigkeit des Verfahrens von der Dimension und in den restlichen Fällen zumindest eine starke Beschleunigung des Verfahrens erreicht.

Eine zusätzliche Beschleunigung des Verfahrens geschieht durch Parallelisierung, d.h. eine verteilte Berechnung auf mehreren Prozessoren. Sie ist ein weiterer Bestandteil der Erfindung. Hierbei wird das gesamte Integrationsproblem in voneinander unabhängige Teilprobleme unterteilt. Dies sind z.B. die einzelnen Teilbereiche, die durch obige Transformation entstanden sind, oder die Teilsummen über die verschiedenen Multiindizes **k** aus der Dünngitter-Quadraturformel. Die Vorrichtung ist in Abb. 2 und 3 dargestellt. Aufgabe des Verteilungsmoduls (7) ist die Zerlegung des Integrationsproblems. Die Kombination der Teilergebnisse wird während der parallelen Rechnung durch ein Zusammenführungsmodul (8) erledigt. Die einzelnen Teilprobleme werden entweder in einem parallelen Rechensystem mit verteiltem Speicher (Abb. 2) oder gemeinsamen Speicher (Abb. 3) durchgeführt.

4 Ausführungsbeispiel

Eine Option ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, der dem Halter das Recht aber nicht die Pflicht gibt, eine festgesetzte Menge von z.B. Aktien zu einem bestimmten Zeitpunkt zu einem vorher festgelegten Preis zu kaufen/verkaufen. Eine Option stellt damit einen intrinsischen Wert dar, da der Halter die Option nicht ausüben muß. Die Frage ist nun wie der Preis für eine Option fair bewertet werden kann. Konkret haben wir hier mit dem Martingalansatz die Bewertung

$$V = e^{-rT}E(P(\{S_i^j\})).$$

Dabei bezeichnet r die konstante Zinsrate, $t = T$ den Zeitpunkt der Optionsausübung, P die Auszahlungsfunktion, S_i^j den Aktienwert der i-ten Aktie des Portfolios zur Zeit $j\Delta t$, mit $\Delta t = T/M$. Hier ist M die Zahl der diskreten Zeitpunkte $j = 1, .., M$ und N bezeichnet die Zahl der betrachteten Aktien $i = 1, .., N$. e^{-rT} ist der Discountfaktor und $t = 0$ ist der Zeitpunkt der Optionsbewertung.

Wir nehmen nun an, daß die Aktien des Portfolios einem Modell folgen, das durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sum_{k=1}^{N} \sigma_{ik} S_k dW_k \tag{1}$$

beschrieben ist, wobei (σ_{ik}) die zeitkonstante Volatilitätsmatrix bezeichnet, μ_i die zeitkonstante Drift für die Aktie i bezeichnet[1] und dW_i ein geometrischer Brownscher Prozeß für die Aktie i ist, d.h. W_i ist das Wiener Maß. Integration und Itô-Formel ergibt nach Diskretisierung in der Zeit mit den Zeitpunkten $j\delta t$ die Werte S_i^j

$$S_i^{j+1} = S_i^j \cdot e^{(\mu_i - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^N \sigma_{ik}^2))\Delta t + \sum_{k=1}^N \sigma_{ik}\sqrt{\Delta t} W_k^j} \tag{2}$$

und somit gilt[2]

$$S_i^j = S_i^0 e^{\sum_{l=1}^j \left[(\mu_i - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^N \sigma_{ik}^2))\Delta t + \sum_{k=1}^N \sigma_{ik}\sqrt{\Delta t} W_k^l\right]}.$$

[1] Es gibt auch Ansätze mit zeitabhängigen Volatilitätsmatrizen und zeitabhängiger Drift. Dann folgen σ_{ik} und μ_i eigenen SDEs, die ihr Verhalten modellieren.

[2] Im Computerprogramm wird die erste rekursive Formel genutzt. Die jetzt folgende nicht-rekursive aufsummierte Form ist aber notwendig um den späteren Integranden definieren zu können.

Hier sind W_k^l Zufallsvariable, die $N(0,1)$-verteilt sind.

Die Definition des Erwartungswerts $E(.)$ ist nun für eine allgemeine Funktion f

$$E(f(\{x_i^j\})) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\{x_i^j\})\; g(x_1^1) \ldots g(x_N^M)\; dx_1^1 \ldots dx_N^M$$

mit der Standard-Normalverteilung

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Mit der Forderung, daß keine Arbitrage existiert, muß der Erwartungswert bezüglich des zum unterliegenden Prozesses äquivalenten Martingalmaßes genommen werden. Es werden dabei in unserem Fall im Integral des Erwartungswerts die μ_i durch r ersetzt. Damit findet auch der Wechsel der SDE (1) in die risikoneutrale Form statt.

Was nun noch fehlt sind die konkreten Auszahlungsfunktionen. Diese sind abhängig von jeweiligen Typ der Option. Generell haben sie die Struktur

$$P(\{S_i^j\}) = \max(0, H(\{S_i^j\}) - K) \tag{3}$$

für Call Optionen und

$$P(\{S_i^j\}) = \max(0, K - H(\{S_i^j\}))$$

für Put Optionen. Dabei ist K der Ausübungspreis. Beispiele sind pfadabhängige Optionen $(N = 1, M > 1)$ und performanceabhängige Optionen $(N > 1, M = 1)$.

Populärstes Beispiel für pfadabhängige Optionen sind sogenannte Asiatische Optionen. Hierbei wird für die Auszahlungsfunktion der Mittelwert über die Aktienkurse zu allen Zeitpunkten zwischen dem momentanen Zeitpunkt und dem Ausübungszeitpunkt genommen. Wir betrachten im folgenden den Fall des geometrischen Mittels, d.h. $H(\{S_i^j\}) = (S_i^1 \cdot S_i^2 \cdot \ldots \cdot S_i^M)^{1/M}$. Hierzu existiert eine geschlossene Lösung in Form einer verallgemeinerte Black-Scholes Formel. Kleine Änderungen und Variationen (z.B. schon das arithmetische Mittel) sind jedoch nicht mehr ohne weiteres analytisch lösbar und benötigen ein spezielles numerisches Integrationsverfahren.

Ein Beispiel für performanceabhängige Optionen sind sogenannte "Tailored Options" [3]. Hier hängt der Preis der Option von der relativen Performance eines Aktienkurses in bezug auf die anderen Aktienkurse einer betrachteten Menge von Aktien ab. Ein Beispiel für eine Call Option ist

$$P(\{S_i^j\}) = \begin{cases} \max(S_1^1 - K, 0) & \text{falls } S_1^1/S_1^0 > S_i^1/S_i^0, 1 < i \leq N \\ a \cdot \max(S_1^1 - K, 0) & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

wobei a ein Parameter aus $[0,1)$ ist. Eine Mischung aus beiden Optionstypen ist selbstverständlich auch möglich. Mit $M = N = 1$ ergibt sich als Spezialfall die Europäische Call Option mit der Black Scholes Formel als analytischer Lösung.

Nun ist also zur Optionsbewertung ein im allgemeinen hochdimensionales Integrationsproblem zu lösen. Die Dimensionen rühren dabei von den Zeitpunkten her, über die bei pfadabhängigen Call Optionen gemittelt wird, oder/und von der Zahl der betrachteten Aktien bei performanceabhängigen Optionen. Aufgrund der Definition des Erwartungswerts ist das Integrationsgebiet bisher noch $(-\infty, \infty)^{N \cdot M}$. Um Integrationsmethoden anwenden zu können transformieren wir das Integral des Erwartungswerts mit Hilfe der kumulativen Normalverteilung $G(y) := \int_{-\infty}^{y} g(x)dx$ auf $[0,1]^{N \cdot M}$ und erhalten damit

$$E(f(\{x_i^j\})) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\{G(x_i^j)\})\; dx_1^1 \ldots dx_M^N. \tag{5}$$

Für die Integration von (5) mit (3) bzw. (4) wollen wir nun die Dünngitter–Technik gewinnbringend einzusetzen.

Für Optionen ergibt sich nun jedoch folgendes Problem: Die Auszahlungsfunktion ist durch die Natur einer Option nicht mehr glatt. Dies drückt letztendlich aus, daß man eine Option ja nicht ausüben wird wenn der Kauf oder Verkauf der abgesicherten Aktie einen Verlust ergeben würde. Der Integrand weist bzgl. einer $(M \cdot N - 1)$–dimensionalen Mannigfaltigkeit einen Knick (pfadabhängige Optionen) oder sogar Sprünge (performanceabhängige Optionen) auf[3]. Beispiele für den Integranden im zweidimensionalen Fall sind in Abb. 5 gegeben. Deutlich sieht man den Knick bzw. den Sprung des Integranden. Die Glattheitsvorraussetzungen für die Anwendung des Dünn-Gitter-Verfahrens sind damit nicht mehr gegeben.

Die Idee ist nun nur über den Träger des Integranden zu integrieren. Hier ist der Integrand eine glatte Funktion, die Knicke und Sprünge befinden sich gerade am Rand des Trägers. Um dieses Gebiet zu bestimmen genügt es, die Nullstellen des Integranden zu berechnen. Wenn man das Integral iteriert berechnet reduziert sich die Nullstellensuche auf eine einzige (die letzte) Dimension. Wir bestimmen deswegen in der letzten Dimension die Nullstelle $\hat{x}$ (Newtonverfahren für den Knick oder Bisektionsverfahren für den Sprung) und transformieren den Integranden bezüglich der letzten Dimension mit der linearen Abbildung

$$t(x) = x \cdot (1 - \hat{x}) + \hat{x}$$

auf [0,1].

Abb. 5 gibt einen Vergleich der verschiedenen Integrationsverfahren bei der Bewertung einer pfadabhängigen Option mit 6 Zeitpunkten, $M = 6, N = 1$, und einer performanceabhängigen Option mit $M = 1, N = 2$. Die überlegene Konvergenzordnung unseres Dünn-Gitter Verfahrens mit Transformation und Gauß-Patterson Formel über die anderen Methoden (Monte Carlo (MC), Klassischer Produktansatz ohne (PR) und mit Transformation auf den Träger (PRTR), Quasi–Monte Carlo ohne (QM) und mit Transformation auf den Träger (QMTR), sowie Gauß-Patterson-Dünne-Gitter ohne (SG) und mit Transformation auf den Träger (SGTR)) ist deutlich zu sehen. Man beachte, daß der Fehler hier logarithmisch aufgetragen ist. Es zeigt sich, daß unser neues Verfahren den Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo Methoden überlegen ist. Diese können eine höhere Glattheit des Integranden nicht ausnutzen, die neue allgemeine Dünngitter–Quadratur kann dies hingegen in optimaler Weise.

Nachdem die Komplexität des Dünngitterverfahrens aufgrund des Terms $\log(N)^{(d-1)(r+1)}$ nicht vollkommen unabhängig von der Dimension des Problems ist, ist es sinnvoll, zusätzlich Dimensionsreduktionsverfahren einzusetzen. Hier soll erläutert werden, wie das Verfahren durch hierarchische Diskretisierung des stochastischen Prozesses und adaptive Verfeinerung das Verfahren weiter beschleunigt werden kann.

Der natürlichste Weg einen stochastischen Prozess zu diskretisieren ist durch einen *random walk*, d.h. durch die rekursive Formel

$$S_i^{j+1} = S_i^j e^{b(W_i^j)},$$

wobei $b(W_i^j)$ genau dem Exponenten aus der Formel 2 entspricht. Durch Diskretisierung mittels Braunscher Brücke [1], wird jedoch der Prozeß mittels eines zukünftigen und eines vergangenen Wertes diskretisiert

$$S_i^j = \frac{S_i^{j+k} + S_i^{j-k}}{2} e^{b(\sqrt{k\Delta t/2} W_i^j)}$$

[3]Neben den Singularitäten am Rand des Integrationsgebiets, die durch die Transformation auf $[0,1]^d$ entstanden sind.

So werden startend mit S_i^0, $S_i^M := 2^{b(\sqrt{T}\cdot W_i^M)}$ die Werte $S_i^{M/2}$, $S_i^{M/4}$, $S_i^{3M/4}$, $S_i^{M/8}$, $S_i^{3M/8}, \ldots$ usw. ermittelt. Dies führt zu einer Konzentration der Gesamtvarianz des Prozesses in den ersten Schritten der Diskretisierung was die Konvergenzrate von Quasi–Monte Carlo Methoden verbessert.

Für das klassische Dünngitterverfahren ergibt sich kein sofortiger Vorteil durch diese Diskretisierungstechnik nachdem alle Dimensionen von gleicher Wichtigkeit sind. Das allgemeine Dünngitterverfahren kann jedoch nun dimensionsadaptiv eingesetzt werden und Quadraturformeln mit niedrigerem Grad in weniger wichtigen Dimensionen verwenden. Auf diese Weise reduziert sich die effektive Dimension für Integrale vom Typ (5) bei pfadabhängigen Derivaten, wodurch die entstehenden Integrationsprobleme schneller und genauer berechnet werden können.

Literatur

[1] R.E. Caflisch, W.J. Morokoff and A. Owen: Valuation of mortgage backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension *J. Comput. Finance*, 1, 1997.

[2] T. Gerstner and M. Griebel, *Numerical integration using sparse grids*, Numer. Algorithms, 18:209–232, 1998.

[3] R. Korn, *Optimal Portfolios*, World Scientific, 1997.

[4] H. Niederreiter, *Random number generation and Quasi-Monte Carlo methods*, SIAM, 1992.

[5] E. Novak, K. Ritter, *High dimensional integration of smooth functions over cubes*, Numer. Math., 75, 79–98, 1996.

[6] S.A. Smolyak, *Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 148, 1042–1043, 1963, Russian, Engl. Transl.: Soviet Math. Dokl. 4:240–243, 1963.

[7] J.F. Traub, S. Paskov, I. Vanderhoof, *Estimation method and system for complex securities using low–discrepancy deterministic sequences*, United States Patent US005940810A, 17. August, 1999.

[8] J.F. Traub, S. Paskov, I. Vanderhoof, A. Papageorgiou, *Portfolio structuring using low–discrepancy deterministic sequences*, United States Patent US006058377A, 2. Mai, 2000.

[9] J. Traub, S. Paskov, *Faster evaluation of financial derivatives*, Journal of Portfolio Management 22, 1, 113-120, 1995.

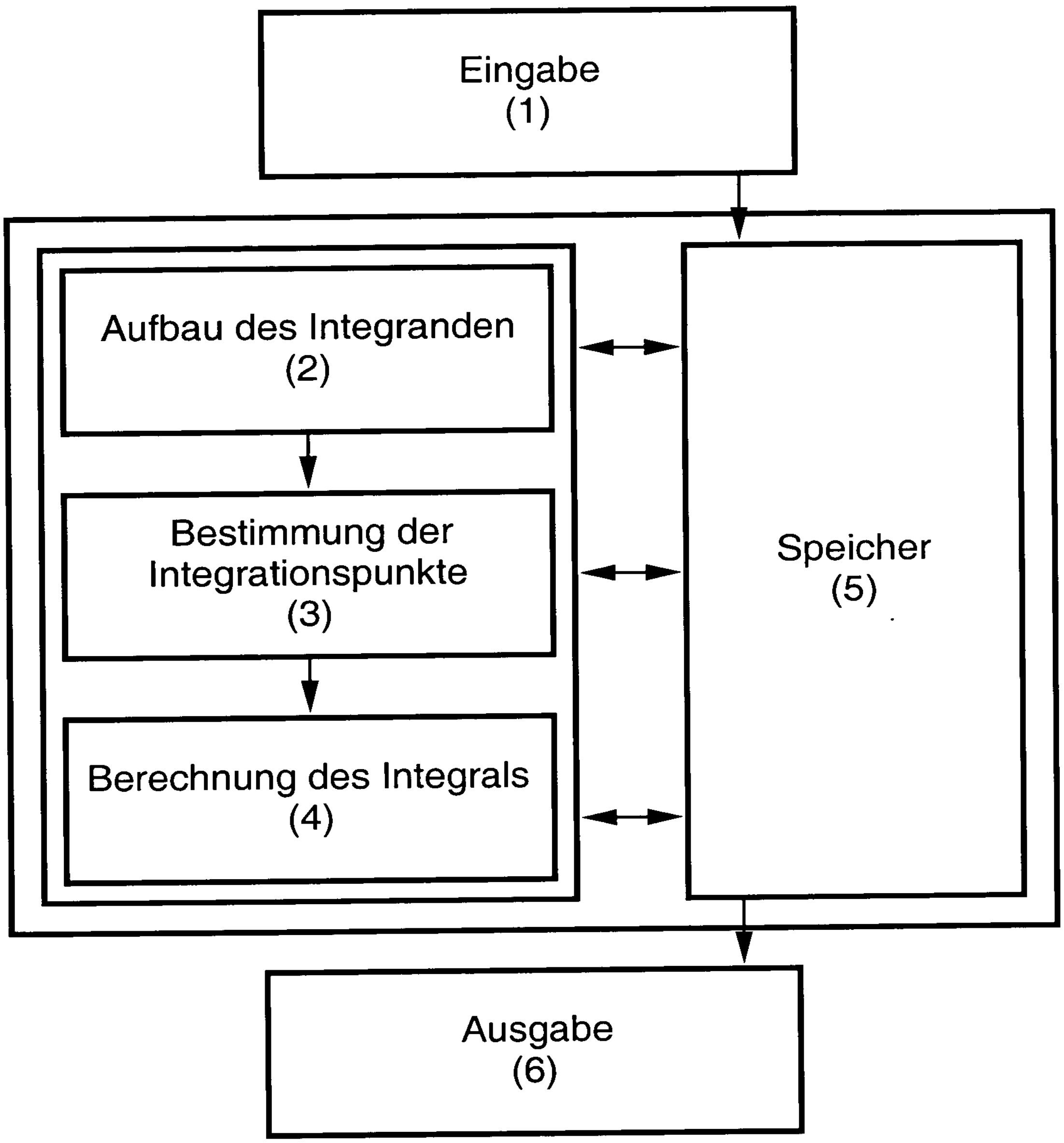

Eingabe
(1)
Aufbau des Integranden
(2)
Bestimmung der
Integrationspunkte
(3)
Berechnung des Integrals
(4)
Speicher
(5)
Ausgabe
(6)

Abb. 1

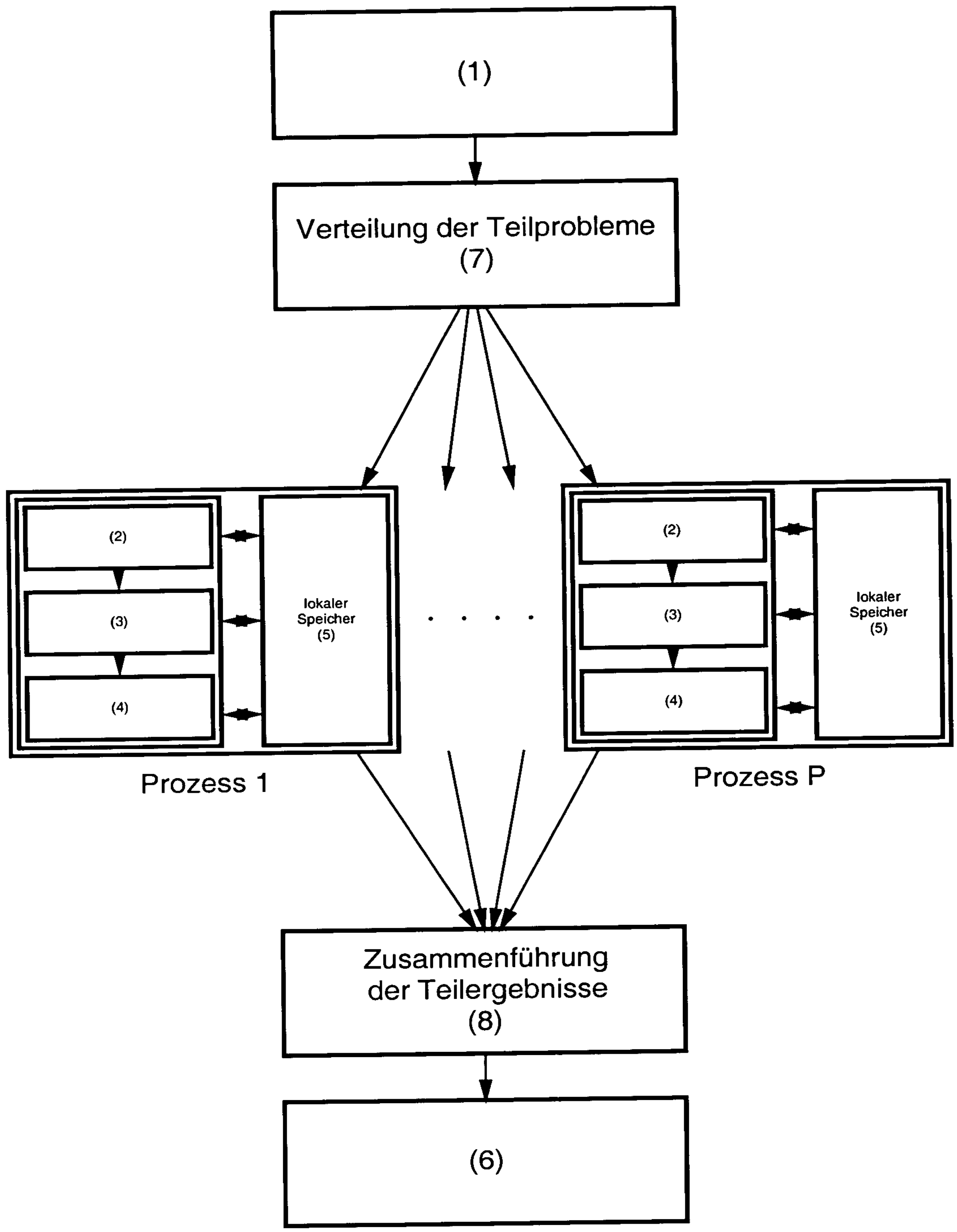

(1)
Verteilung der Teilprobleme
(7)
(2)
(3)
(4)
lokaler
Speicher
(5)
Prozess 1
(2)
(3)
(4)
lokaler
Speicher
(5)
Prozess P
Zusammenführung
der Teilergebnisse
(8)
(6)

Abb. 2

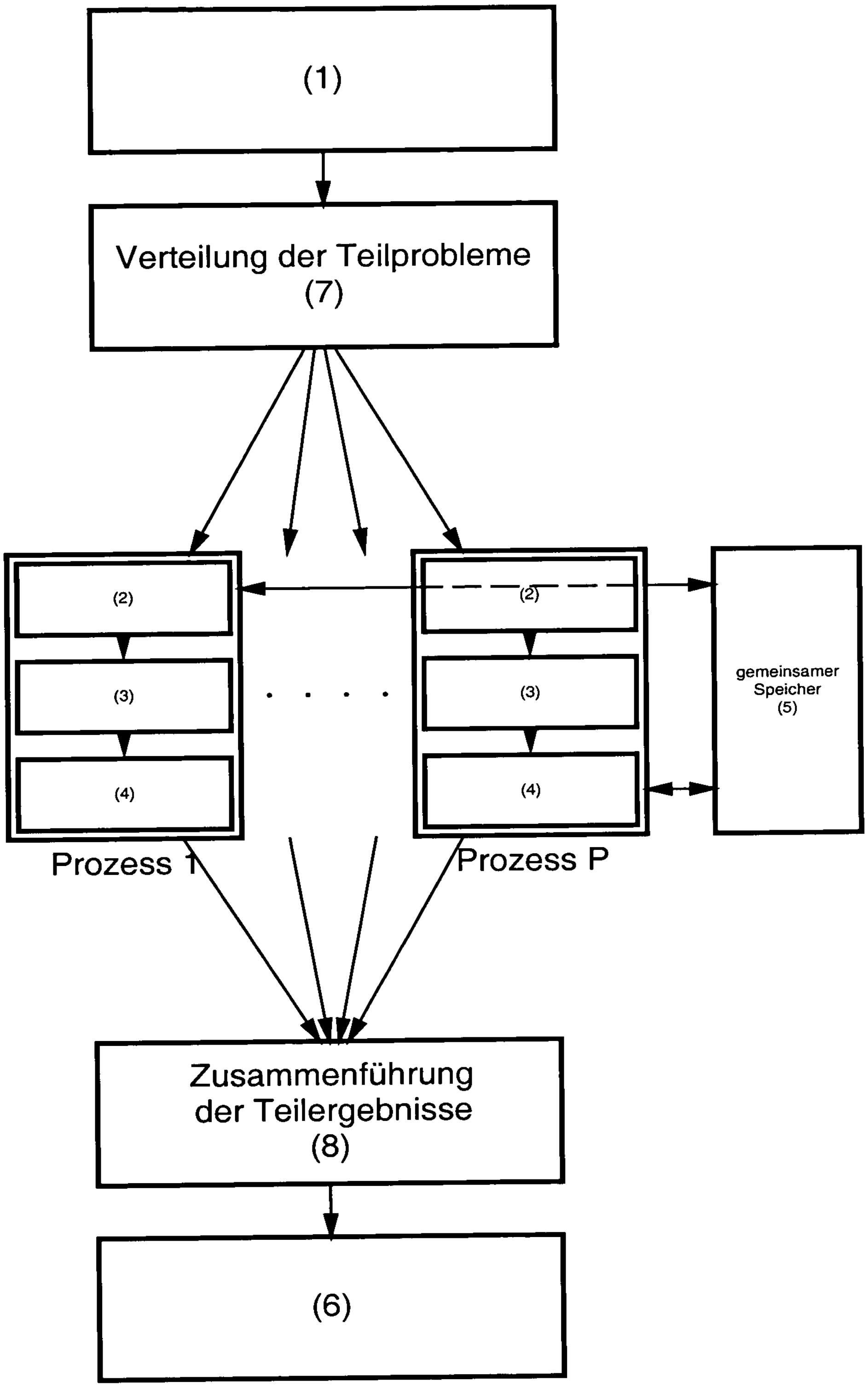

(1)
Verteilung der Teilprobleme
(7)
(2)
(3)
(4)
Prozess 1
(2)
(3)
(4)
Prozess P
gemeinsamer
Speicher
(5)
Zusammenführung
der Teilergebnisse
(8)
(6)

Abb. 3

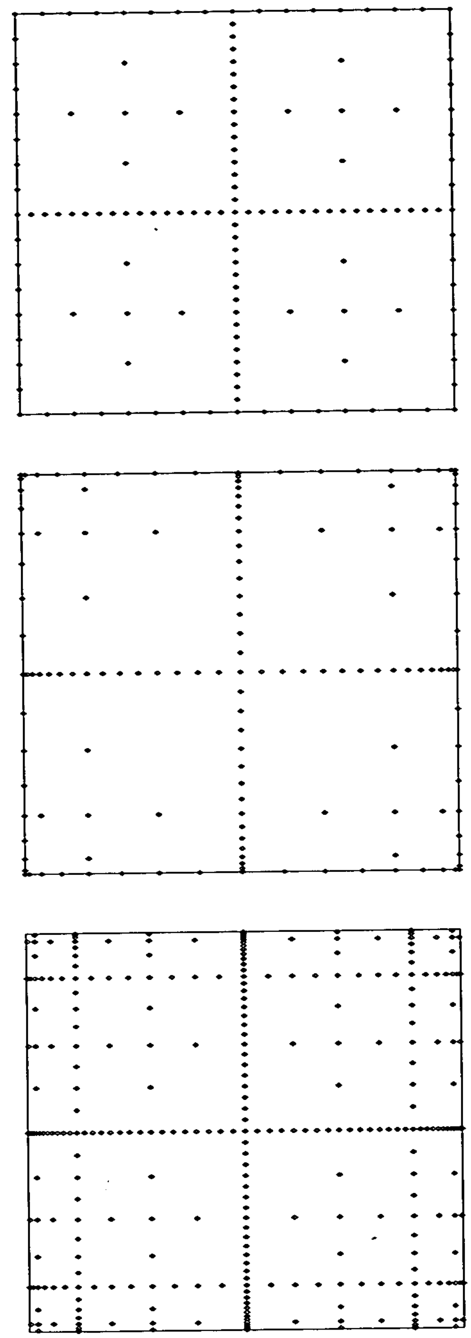


Abb. 4

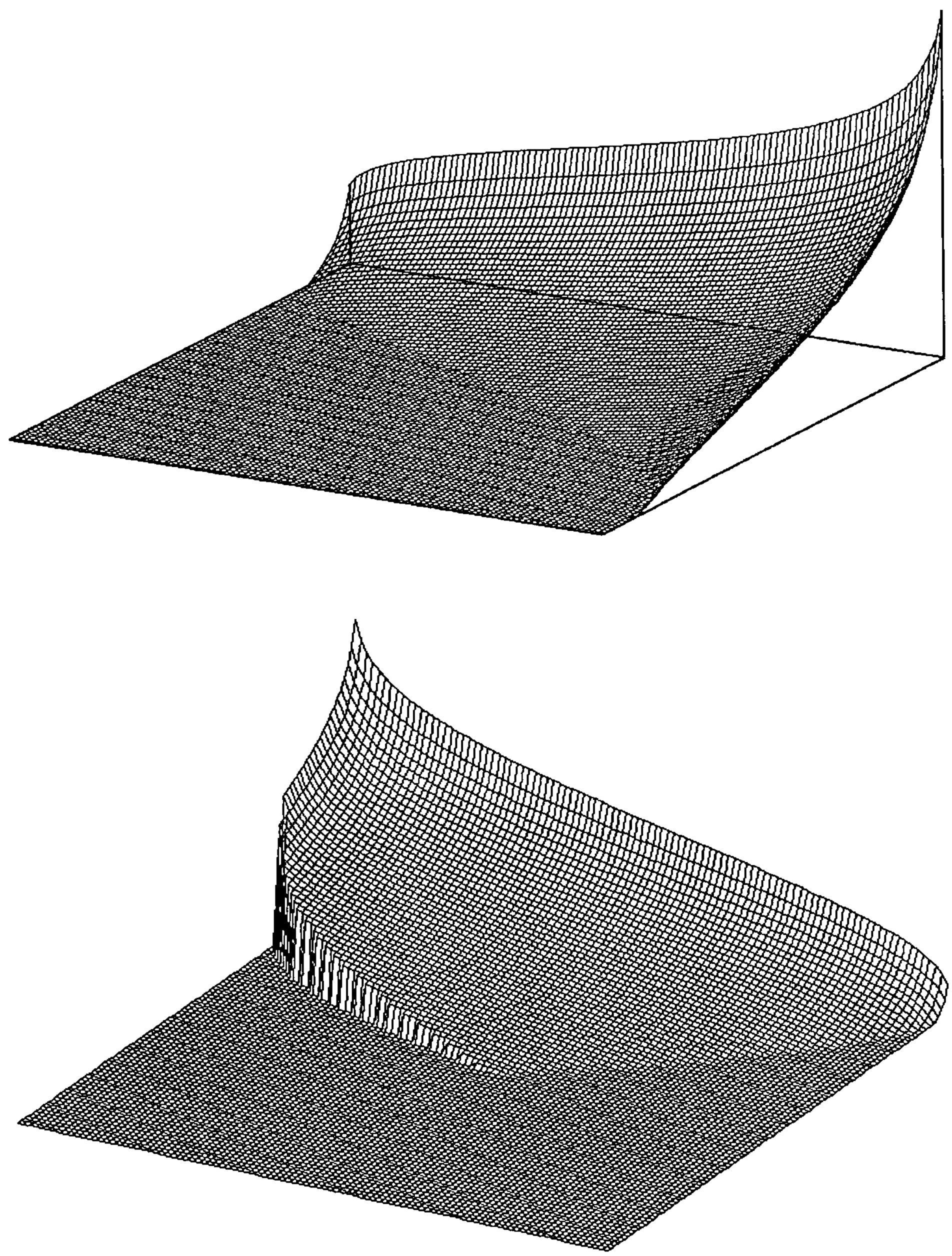
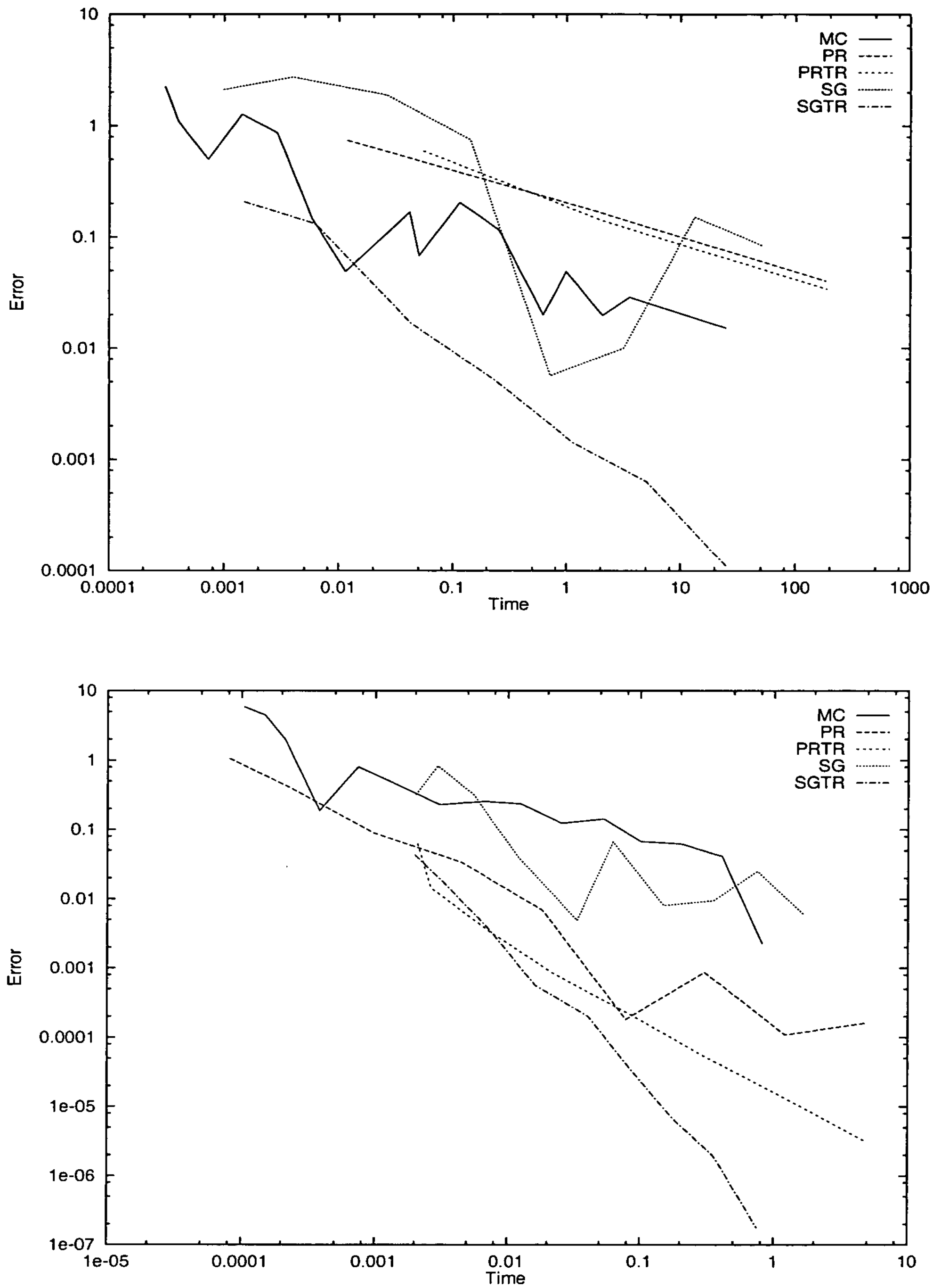


Abb. 5



MC
PR
PRTR
SG
SGTR
Error
Time
10
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
0.0001
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
MC
PR
PRTR
SG
SGTR
Error
Time
10
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
1e-05
0.0001
0.001
0.01
0.1
1
10

Abb. 6

Patentansprüche

1. Vorrichtung und Verfahren zur Bewertung von Finanzderivaten, wobei der Wert des Derivats durch die Ermittlung eines Erwartungswerts berechnet wird, bei dem
   (a) mittels einer Tastatur oder eines anderen Eingabegeräts die Parameter des Derivats eingegeben werden,
   (b) mittels eines Computers basierend auf den Eingabeparametern ein Integrand aufgebaut wird und ein geeigneter mehrdimensionaler Integrationsbereich bestimmt wird,
   (c) mittels eines Computers Integrationspunkte und Integrationsgewichte durch ein Dünngitter–Verfahren ermittelt werden,
   (d) mittels eines Computers der Integrand im Integrationsbereich an den Dünngitter–Integrationspunkten ausgewertet wird,
   (e) mittels eines Computers der Erwartungswert durch Kombination der Integrandwerte unter Verwendung der Integrationsgewichte berechnet wird.
   (f) mittels eines Bildschirms oder eines anderen Ausgabegeräts der berechnete Wert des Derivats ausgegeben wird.
2. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei Ein- und Ausgabe über eine analoge oder digitale Verbindung stattfinden.
3. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei der Integrationsbereich durch Nullstellensuche bestimmt wird.
4. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei die Integrationspunkte sowie Integrationsgewichte dynamisch während der Berechnung des Integrals ermittelt werden.
5. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei das Integrationsgebiet in mehrere Teilintegrale zerlegt wird und mehrere Prozessoren zur Berechnung der Teilintegrale verwendet werden.
6. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei mehrere Prozessoren zur Berechnung der Integrationspunkte, Integrationsgewichte, zur Auswertung des Integranden oder zur Kombination der Integrandwerte herangezogen werden.
7. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei die Dimension der Integrale zur Beschleunigung des Verfahrens reduziert werden.
8. Vorrichtung und Verfahren nach (1), wobei zur Bewertung mehrere Erwartungswerte berechnet und kombiniert werden.